BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2005

ВОЛНЫ В УПРУГОЙ ТРУБКЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ С РЕАКЦИЕЙ, СОДЕРЖАЩЕЙ ЖИДКОСТЬ

Г.Т.ШИХЛИНСКАЯ
Бакинский Государственный Университет

Рассматривается пульсирующее течение вязкой несжимаемой ньютоновой жидкости, заключенной в упругою трубку переменного кругового сечения. Полагается, что материал трубки обладает реакцией на внешнее воздействие. Решение задачи сводится к интегральному уравнению типа Вольтерра, решение которого осуществляется методом последовательных приближений.

На процесс течения жидкостей в деформируемой трубке существенно сказывается вязкость жидкости, сужение трубки и реакция материала на внешнее воздействие. В работе [1] рассмотрено пульсирующее течение вязкой несжимаемой жидкости в упругой трубке с реакцией постоянного радиуса.

В данной работе дается развитие этого вопроса для случая полубесконечной круговой трубки переменного сечения. Полагается, что трубка жестко прикреплена к окружающей среде и таким образом, смещение в осевом направлении отсутствует.

1. Вначале выпишем соответствующую систему уравнений гидроупругости. Для малых возмущений, используя общепринятые обозначения [2], она имеет вид:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{8\kappa}{R^2(x)}u=0 \tag{1.1}$$

уравнение ламинарного течения жидкости,

$$\frac{\partial}{\partial x}(Su)+L\frac{\partial w}{\partial t}=0 \tag{1.2}$$

уравнение неразрывности и уравнения состояния [1], которое в данном случае принимает форму:

$$w=\frac{p}{E}\frac{R^2(x)}{h}(1-A)+\frac{A}{E}\tau p\frac{R^2(x)}{h}\,. \tag{1.3}$$

Здесь $0 \leq A < 1$ коэффициент реакции, а $\tau << 1$ – время запаздывания [3]. Введем расход жидкости по формуле $Q = S(x)u$. Тогда систему (1.1)–(1.3) перепишем следующим образом:

$$\frac{S}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{8\kappa}{R^2(x)}Q = 0 \qquad (1.4)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + L\frac{\partial w}{\partial t} = 0 \qquad (1.5)$$

$$w = \frac{p}{E}\frac{R^2(x)}{h}(1-A) + \frac{A}{E}\tau \dot{p}\frac{R^2(x)}{h}. \qquad (1.6)$$

Теперь допустим, что функции $p(x,t)$, $w(x,t)$ и $Q(x,t)$ меняются с течением времени по закону:

$$p(x,t) = p_1(x)\exp(i\omega t) \ ,$$
$$Q(x,t) = Q_1(x)\exp(i\omega t) \ ,$$
$$w(x,t) = w_1(x)\exp(i\omega t) \ ,$$

где p_1, Q_1, w_1 – искомые функции координат, а ϖ – задаваемая круговая частота. Подставляя эти зависимости в систему уравнений (1.4)–(1.6), находим:

$$\begin{aligned} &\frac{S}{\rho}p_1^{'} + \lambda_1(x)Q_1 = 0 \ , \\ &Q_1^{'} + i\varpi L w_1 = 0 \ , \\ &p_1 = \frac{hE}{R^2(x)}\frac{1}{\lambda}w_1 \ . \end{aligned} \qquad (1.7)$$

Штрихи обозначают дифференцирование по продольной координате x, а для краткости записи, введены следующие обозначения

$$\lambda_1(x) = i\varpi + \frac{8\kappa}{R^2(x)} \ , \quad \lambda = (1-A) + i\varpi A\tau \ .$$

Комбинируя систему (1.7), после ряда элементарных выкладок, получим:

$$p_1^{''} + \left\{2\frac{R^{'}(x)}{R(x)} - \frac{\lambda_1^{'}(x)}{\lambda_1(x)}\right\}p_1^{'} + \rho\lambda_1(x)\frac{2R(x)}{i}\lambda\varpi\frac{1}{hE} = 0 \qquad (1.8)$$

Относительно функции $R(x)$ допустим, что она является монотонно убывающей для $\forall x \in [0,\infty)$. Полагая, что на бесконечности трубка имеет постоянное сечение R_∞, не умоляя общности, запишем ее как $R(x) = R_\infty g(x)$. Отсюда

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 1\ .$$

Более того, примем, что $g(x)$ дважды дифференцируемая функция и

$$\lim_{x\to\infty} g^{'}(x) = 0\ ;\ \lim_{x\to\infty} g^{''}(x) = 0$$

Теперь, введя следующие обозначения

$$\mu_1(x) = 2\frac{g^{'}(x)}{g(x)} - \frac{\lambda^{'}(x)}{\lambda(x)},$$

$$\mu_2(x) = \lambda(x)\frac{\varpi}{ic_0^2}g(x),$$

$$c_0^2 = \frac{hE}{2\rho R_\infty \lambda},$$

уравнение (1.8) перепишем следующим образом:

$$p_1^{''} + \mu_1(x)p_1^{'} + \mu_2(x)p_1 = 0 \tag{1.9}$$

Заменой Лиувилля

$$y(x) = p_1(x)\exp\left\{\frac{1}{2}\int \mu_1(x)dx\right\} = p_1(x)\mu_0(x)$$

уравнение (1.9) приведем к виду

$$y^{''} + I(x)y = 0\ , \tag{1.10}$$

где

$$I(x) = \mu_2(x) - \frac{1}{4}[\mu_1(x)]^2 - \frac{1}{2}[\mu_1(x)]^{'}\ .$$

При этом квадрат комплексной скорости распространения волны есть

$$c^2 = \frac{\varpi^2}{\mathrm{Re}\{I(x)\}},$$

а $JmI(x)$ – характеризует ее затухание. Легко показать, что

$$\lim_{x\to\infty} I(x) = \frac{\varpi}{ic_0^2}\left(i\varpi + \frac{8\kappa}{R_\infty^2}\right) = \delta^2\ .$$

Наконец положив

$$q(x) = 1 - \frac{I(x)}{\delta^2}$$

уравнение (1.10) перепишем в форме

$$y^{''} + \delta^2 y = \delta^2 q(x)y\ . \tag{1.11}$$

Будем полагать, что потенциал $q(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty |q(x)|dx < +\infty\ , \tag{1.12}$$

а для мнимой части δ положим

$$Jm\delta < 0 . \tag{1.13}$$

При заданных граничных условиях

$$y(0) = y_0 \ ; \quad \underset{x \to \infty}{y} \to 0 , \tag{1.14}$$

приходим к сингулярной краевой задаче Штурма-Лиувилля (1.11) и (1.14). Заметим, что величина y_0 может быть определена из условия задания на торце трубке пульсирующего давления

$$p(0,t) = p_0 \exp(i\omega t) , \tag{1.15}$$

в котором p_0 – задаваемая эмпирическая величина.

2. Краевую задачу (1.11) и (1.14) сведем к эквивалентному интегральному уравнению [4]

$$y(x, -\delta) = Ce^{-i\delta x} + \delta \int_x^{\infty} \sin \delta(\xi - x) q(\xi) y(\xi, -\delta) d\xi ,$$

здесь

$$C = \frac{y_0}{f(0, -\delta)} , \ \ y = y_0 \frac{f(x, -\delta)}{f(0, -\delta)} ,$$

а $f(x, -\delta)$ определяется из решения интегрального уравнения

$$f(x, -\delta) = e^{-i\delta x} + \delta \int_x^{\infty} \sin \delta(\xi - x) q(\xi) f(\xi, -\delta) d\xi . \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) является уравнением типа Вольтерра и решается методом последовательных приближений:

$$f(x, -\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n f_n(x, -\delta) \tag{2.2}$$

при

$$\begin{aligned} & f_0 = e^{-i\delta x} , \\ & . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ & f_n = \int_x^{\infty} \sin \delta(\xi - x) q(\xi) f_{n-1}(\xi, -\delta) d\xi , \ (n = 1, 2, \ldots) . \end{aligned} \tag{2.3}$$

В силу неравенств (1.12) и (1.13), из равномерной сходимости последовательных приближений следует, что единственное решение интегрального уравнения (2.1) определяется формулой (2.2). Непосредственной проверкой легко установить, что это решение является также решением исходного уравнения (1.11). Отсюда, зная функцию y, из замены Лиувилля имеем равенство

$$p_1(x) = \frac{y_0 f(x, -\delta)}{\mu_0(x) f(0, -\delta)} ,$$

где

$$\mu_0(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}\int \mu_1(x)dx\right\} \qquad (2.4)$$

Сравнивая последнее равенство при $x = 0$ с (1.15) определим:

$$y_0 = p_0\mu_0(0).$$

Теперь не представляет труда по формулам (1.7) и (2.4) вычислить функции p, w, Q, которые имеют вид:

$$p(x,t) = p_0 \frac{\mu_0(0)f(x, -\delta)}{\mu_0(x)f(0, -\delta)}\exp(i\omega t) \ ,$$

$$w(x,t) = p_0\lambda \frac{R_\infty^2 g^2(x)}{hE}\frac{\mu_0(0)}{\mu_0(x)}\frac{f(x, -\delta)}{f(0, -\delta)}\exp(i\omega t) \ ,$$

$$Q(x,t) = -p_0 \frac{\pi R_\infty^2 g^2(x)}{\rho\lambda(x)}\frac{\mu_0(0)}{f(0, -\delta)}\left\{\frac{f(x, -\delta)}{\mu_0(x)}\right\}' \ .$$

Отметим, что из структуры ряда (2.2) следует, что ряд полученный его почленным дифференцированием по x, также сходится равномерно.

Таким образом, ряд (2.2) в сочетании с соотношениями (2.3) дает конструктивное представление искомого решения. Заметим, что в силу линейности задачи физическую величину представляют их реальные части.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шихлинская Г.Т. Волны в конечной упругой трубке с реакцией, содержащей жидкость. ДАН Аз-на, 2000, т.56, № 4-6, с.66-71.
2. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М., Мир, 1983, 400с.
3. Амензаде Р.Ю., Дамиров Н.Т. Динамический вариационный принцип теории упругости с учетом реакции. „Xəbərlər“, БГУ, № 2, 1999.
4. Амензаде Р.Ю. Волны в неоднородной трубке, содержащей жидкость. ДАН СССР, 1980, т.253, № 3, с.562-564.

DƏYİŞƏN EN KƏSİYİNƏ MALİK ELASTİK BORUCUQDA MAYENİN DALĞAVARI HƏRƏKƏTİ

G.T.ŞIXLİNSKAYA

ANNOTASİYA

Məqalədə dəyişən dairəvi en kəsiyinə malik elastik borucuqda sıxılmayan, özlü mayenin dalğavarı hərəkətinə baxılır. Borunun materialı xarici təsirlərə qarşı reaksiyalıdır. Məsələnin həlli Volter tipli inteqral tənliklərə gətirilir və ardıcıl yaxınlaşma üsulundan istifadə edilir.

THE WAVES IN SPRINGY TUBE OF THE VARIABLE SECTION WITH REACTION, CONTAINING LIQUID

G.T.SHIKHLINSKAYA

ABSTRACT

It is considered pulsing current viscous incondensable to liquids, concluded in springy tube of the variable circular section. Relies on that material of the tube possesses the reaction on external influence. The decision of the problem is reduced to integral equation of the type Volterra, which decision is realized by method of the progressive approximations.